REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur

**Concours Nationaux d'Entrée aux Cycles de Formation d'Ingénieurs**
**Session : Juin 2001**



# Concours Physique et Chimie
# Epreuve de Physique

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Date : Samedi 09 juin 2001** | **Heure : 8 H** | **Durée : 4 H** | **Nb pages : 8** |

**Barème : Partie I : 3,5 pts; Partie II : 6,5 pts ; Partie III : 7,5 pts ; Partie IV : 2,5 pts**

L'usage d'une calculatrice (non programmable) est autorisé.

*Si au cours de l 'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

L'épreuve est composée de quatre parties indépendantes. Le but du problème est d'examiner quelques caractéristiques de la propagation d'ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique. Les deux premières parties du problème étudient la réponse du milieu à une excitation électromagnétique. La troisième partie traite la propagation guidée dans un diélectrique. Enfin, la quatrième partie présente une application à la mesure de l'intensité du courant électrique.

## PARTIE I : Propagation d'une onde électromagnétique dans un diélectrique

On considère un milieu diélectrique parfait, linéaire, homogène, isotrope, localement neutre, d'indice n et de perméabilité magnétique égale à celle du vide $\mu_0$. Le mouvement de l'électron d'un atome de ce milieu est décrit dans le modèle de l'électron élastiquement lié : l'électron de charge -e et de masse m est soumis, de la part du noyau, supposé fixe, à une force de rappel de type :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{s}$$

où : $\vec{s}$ est le vecteur position de l'électron par rapport au noyau et $\alpha$ est une constante réelle positive. Pour l'étude du mouvement de l'électron, on se place dans le cadre de la mécanique classique. On désigne par N le nombre d'atomes par unité de volume.
Dans tout le problème, on négligera le poids de l'électron et toutes les forces de frottement.

*On donne* : La charge de l'électron $- e = -1{,}6\ 10^{-19}$ C.
La masse de l'électron $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg.

I-1 On étudie dans ce milieu la propagation d'une onde électromagnétique plane monochromatique, de pulsation $\omega$ et de vecteur d'onde $\vec{k}$. Les champs électrique et magnétique correspondants s'écrivent en notation complexe :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \qquad i^2=-1$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\, e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$$

$\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ sont les amplitudes respectives des champs électrique magnétique de l'onde et $\vec{r}$ le vecteur position d'un point quelconque du milieu.

On suppose que la longueur d'onde $\lambda$ est très supérieure à la dimension de l'atome, de manière à considérer le champ excitateur uniforme pour le mouvement de l'électron. Dans ces conditions, on peut négliger la dépendance spatiale $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ du champ $\vec{E}$.

I-1-a) Ecrire l'équation régissant le mouvement d'un électron.

b) Montrer qu'on peut négliger l'action du champ magnétique de l'onde devant celle de son champ électrique.

c) En déduire qu'en régime permanent, le vecteur $\vec{s}$ s'écrit :

$$\vec{s} = -\frac{e}{\alpha}\left(\frac{\vec{E}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right).$$

Donner alors l'expression de la vitesse de l'électron : $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$.

Préciser l'expression de $\omega_0$ en fonction de $\alpha$ et m. Quelle est sa signification physique ?

d) Définir et exprimer le vecteur densité de courant $\vec{j}$ lié au mouvement des électrons du milieu. On introduira dans l'expression de $\vec{j}$ la quantité $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$ où $\varepsilon_0$ est la permittivité du vide.

I-2-a) Ecrire les équations de Maxwell dans ce milieu.

b) Montrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transversaux.

c) Déterminer l'équation de dispersion $k = f(\omega)$. On donnera l'expression reliant $k^2$ à $\omega^2$ en faisant apparaître $\omega_0$, $\omega_p$ et la vitesse de la lumière c dans le vide.

d) En déduire l'expression de la permittivité diélectrique du milieu $\varepsilon(\omega)$ en fonction de $\omega$, $\omega_0$, $\omega_p$ et $\varepsilon_0$.

I-3-a) Tracer l'allure de la courbe représentant les variations de $k^2$ en fonction de $\omega^2$.

b) Préciser, suivant les valeurs de $\omega$, la nature des ondes se propageant dans le milieu.

c) Définir et exprimer la vitesse de phase $v_\varphi$. Tracer l'allure de la courbe représentant ses variations en fonction de $\omega^2$.

## PARTIE II : Propagation d'une onde dans un diélectrique en présence d'un champ magnétique uniforme

On suppose que le milieu précédent, est soumis en plus, à un champ magnétique uniforme et constant au cours du temps : $\vec{B}_1 = B_1\,\vec{e}_z$, où $\vec{e}_z$ est un vecteur unitaire d'un axe Oz. Dans cette partie, les champs électrique et magnétique de l'onde s'écrivent :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\,e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\,e^{i(kz-\omega t)}$$

II-1-a) Montrer que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours transversaux.

b) Réécrire, avec l'hypothèse de la question I-1-b, l'équation du mouvement d'un électron.

c) En effectuant le produit scalaire de l'équation précédente par $\vec{e}_z$, conclure quant au mouvement d'un électron suivant Oz.

Dans la suite du problème, on ne s'intéressera qu'aux mouvements forcés de l'électron.

d) En effectuant le produit vectoriel de l'équation de mouvement par $\vec{e}_z$, montrer que l'expression du vecteur $\vec{s}$ caractérisant la position d'un électron est donnée par :

$$\vec{s} = \frac{e}{m}\left(\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)\vec{E} + i\omega\frac{eB_1}{m}(\vec{e}_z \wedge \vec{E})}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \omega^2\left(\frac{eB_1}{m}\right)^2}\right)$$

On rappelle que : $\vec{A} \wedge \left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}.\vec{B}\right)\vec{C}$

II-2-a) Déduire des résultats précédents le vecteur polarisation $\vec{P}$ du milieu.

b) Calculer le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$ de l'onde. On mettra $\vec{D}$ sous la forme :

$$\vec{D} = \varepsilon_0(A\vec{E} + C(\vec{e}_z \wedge \vec{E}))$$

On exprimera les constantes A et C en fonction de $\omega_0$, $\omega_p$ et $\omega_c = \frac{eB_1}{m}$.

c) En écrivant les équations de Maxwell, montrer que les vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{E}$ sont liés par la relation :

$$k^2\ \vec{E} = \frac{\omega^2}{\varepsilon_0 c^2}\ \vec{D}$$

II-3-a) On pose $k = \frac{n\omega}{c}$. En utilisant, la relation de la question II-2-c, montrer que les composantes $E_x$ et $E_y$ du champ $\vec{E}$ sont liées par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases}(n^2 - A)E_x + CE_y = 0 \\ -CE_x + (n^2 - A)E_y = 0\end{cases}$$

b) Déduire du système précédent qu'il existe deux modes de propagation possibles caractérisés par deux valeurs n' et n'' de l'indice n.

c) Vérifier que $\frac{E_x}{E_y} = \pm i$ et que ces deux modes correspondent respectivement dans le plan z=0, à deux polarisations circulaire droite et circulaire gauche.

d) En posant n' + n'' = $2n_0$, exprimer n', n'' et n'- n'' en fonction de $\omega_0$, $\omega_p$, $\omega_c$, $\omega$ et $n_0$.

II-4 Le milieu précédent est une lame à faces parallèles de longueur $l$ suivant Oz (figure 1).

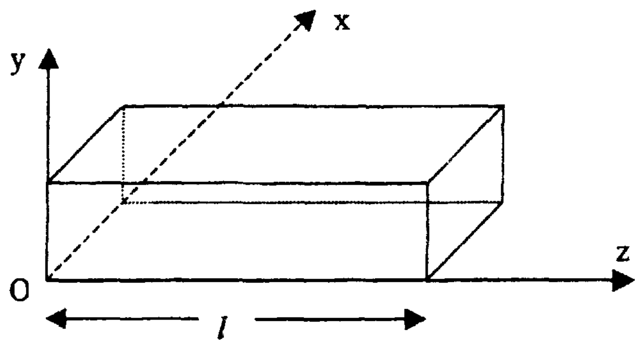


**Figure 1**

Une onde plane polarisée rectilignement suivant ox et de longueur d'onde $\lambda$, se propageant le long de l'axe Oz, pénètre dans la lame en $z = 0$.

a) Montrer que pour $\lambda = 180$ nm, la pulsation de coupure $\omega_c$ est très petite devant $\omega_0$ et $\omega$ ($\omega_0$ est généralement située dans le visible). On prend : $B_1 = 1$ Tesla.

b) En déduire une nouvelle expression simplifiée de $n' - n''$.

c) Montrer que dans le plan $z=0$, l'onde incidente, polarisée rectilignement, est la superposition de deux ondes polarisées circulaire droite $\vec{E}_+$ et circulaire gauche $\vec{E}_-$. Donner les nouvelles expressions de $\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$ à la sortie de la lame ($z = l$) en fonction de $n'$, $n''$, $l$, $\omega$ et c.

d) En déduire qu'à la sortie de la lame, l'onde reste polarisée rectilignement, mais que sa direction de polarisation a tourné d'un angle $\alpha$ qu'on écrira sous la forme :

$$\alpha = V\,l\,B_1 \qquad (1)$$

Donner l'expression de la constante V, appelée constante de Verdet.

*On rappelle que* : $\cos a + \cos b = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$

## PARTIE III : Principe du guidage d'une onde lumineuse

On s'intéresse, dans cette partie à la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation $\omega$ dans un guide diélectrique dont le schéma est représenté sur la figure 2. Ce guide est constitué d'une couche cœur infinie de matériau diélectrique, d'épaisseur d, insérée entre deux plans parfaitement conducteurs et totalement réfléchissants.

Ce milieu diélectrique est linéaire, homogène, isotrope et non magnétique, du type étudié précédemment. On le caractérise par son indice de réfraction $n(\omega)$. A la pulsation $\omega$ de l'onde, on a $n(\omega) = n = 3{,}3$ .

Dans cette partie le champ magnétique permanent $\vec{B}_1$ est nul.

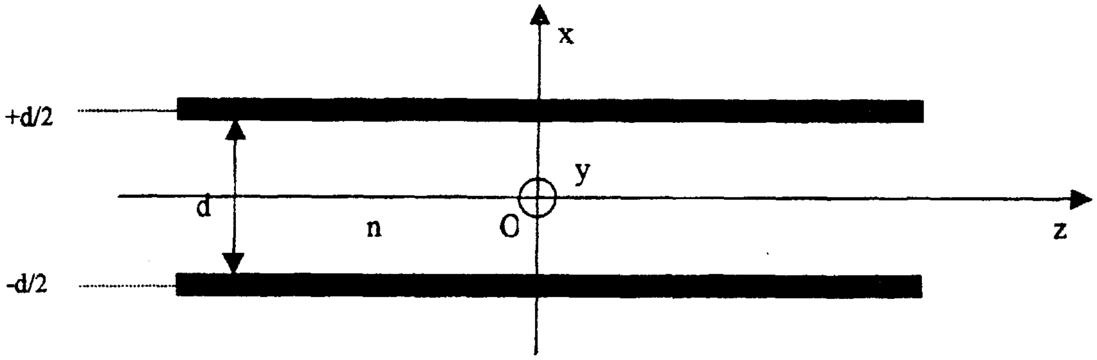


**Figure 2**

III-1) Montrer que le champ électrique de l'onde, $\vec{E}(\vec{r},t)$, obéit à l'équation suivante :

$$\Delta\vec{E}(\vec{r},t)+\mu_0\varepsilon_0 n^2\omega^2\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{0} \qquad (2)$$

III-2) Rappeler les conditions aux limites vérifiées par le champ $\vec{E}(\vec{r},t)$ à l'interface diélectrique – conducteur.

III-3) On se limite au cas de la propagation des ondes transverses électriques pour lesquelles le champ $\vec{E}(\vec{r},t)$ est orienté selon Oy et on cherche une solution de l'équation (2) sous la forme :

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left\{F(x,y)e^{i\beta z}e^{-i\omega t}\right\}\vec{e}_y$$

où $\beta$ est une constante positive, et Re désignant la partie réelle.

a) Montrer, en utilisant une des équations de Maxwell, que F(x,y) ne dépend pas de y.

b) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par F(x). On posera $k=\frac{\omega}{c}$

c) Montrer que la propagation n'est possible que si $\beta < k\,n$ (condition de guidage).

d) On pose $\gamma^2 = k^2n^2 - \beta^2$ avec $\gamma$ positif. Montrer alors que les solutions de cette équation différentielle n'existent que pour des valeurs discrètes $\gamma_p$ de $\gamma$ qu'on déterminera. A chaque valeur $\gamma_p$ correspond un mode guidé du champ électromagnétique caractérisé par l'amplitude $F_p(x)$.

e) Dans le cas d'une onde, de longueur d'onde dans le vide $\lambda$ = 1,4 µm, comment doit-on choisir l'épaisseur d de la couche du diélectrique pour que seul le mode fondamental (p=1) se propage ?

III-4) On se place dans les conditions où le guide ne laisse se propager que le seul mode p=1. Donner l'expression du champ électrique correspondant.

On s'intéresse toujours à la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique transverse électrique de pulsation $\omega$. On envisage dans cette partie une structure réaliste qui est celle d'une fibre optique, représentée sur la figure 3. La couche cœur du diélectrique, d'indice de réfraction noté $n_c$ ($n_c$ =3,3 ), est maintenant entourée par une deuxième couche de diélectrique, semi-infinie.

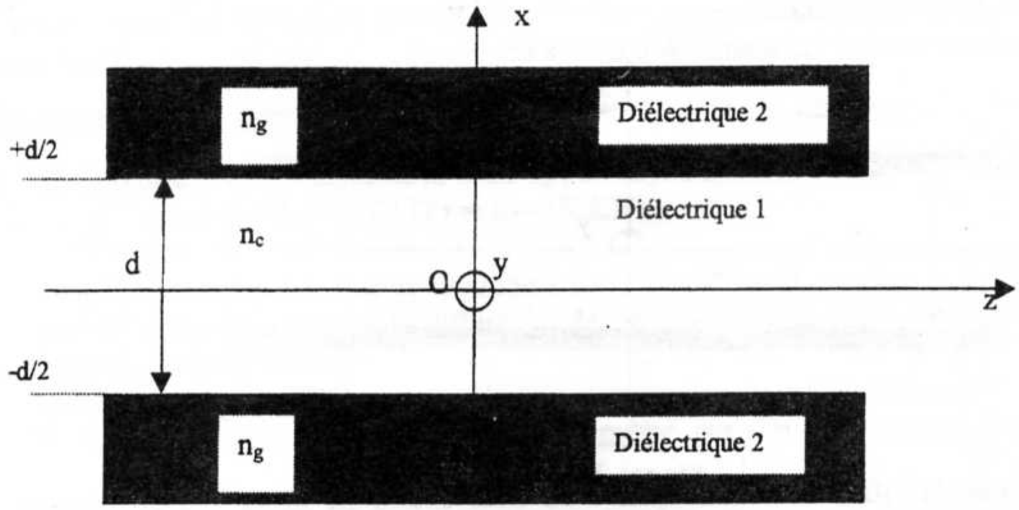


**Figure 3**

Cette deuxième couche sera considérée comme un milieu diélectrique linéaire, homogène, isotrope, non magnétique et d'indice de réfraction $n_g$ ($n_g$ =2 ,7). Comme dans la première partie on cherche des solutions de l'équation (2) de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{F(x,y)e^{i\beta z}e^{-i\omega t}\right\}\vec{e}_y$$

III-5) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'amplitude F(x) dans chaque milieu. On introduira les paramètres $\gamma$ et $\rho$ tels que : $\gamma^2 = k^2 n_c^2 - \beta^2$ et $\rho^2 = \beta^2 - k^2 n_g^2$ .

III-6-a) Que doit être le sens de variation de l 'amplitude F(x) à l 'extérieur du cœur pour que l'onde soit évanescente. En déduire le signe de $\rho^2$ .Montrer que la condition de guidage de l'onde électromagnétique s'écrit maintenant : $k\,n_g < \beta < k\,n_c$ .

b) En supposant cette condition satisfaite, donner la solution générale de l'équation précédente dans chaque milieu .

III-7-a) Ecrire les relations de continuité entre les deux diélectriques pour les champs électrique et magnétique de l'onde.

b) Montre que les composantes tangentielles de $\vec{B}$ sont continues.

c) En déduire la continuité de $\vec{E}$ et $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial x}$ aux interfaces : $x = \pm \dfrac{d}{2}$.

III-8) Etant donnée la symétrie du problème, on peut chercher des fonctions F(x) paires ou impaires.

a) Montrer que dans le cas où F (x) est une fonction paire, les paramètres $\gamma$ et $\rho$ doivent vérifier les relations suivantes :

$$\gamma^2 + \rho^2 = k^2(n_c^2 - n_g^2); \quad \left|\cos\left(\gamma\frac{d}{2}\right)\right| = \frac{\gamma}{k\sqrt{n_c^2 - n_g^2}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{tg}\left(\gamma\frac{d}{2}\right) > 0$$

*On rappelle que* : $\cos^2 a = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 a}$.

b) Montrer que l'amplitude du mode fondamental (p = 1) est donnée par :

$$\begin{cases} F(x) = A\cos(\gamma x) & \text{si } |x| < \dfrac{d}{2} \\ F(x) = A\cos(\gamma \dfrac{d}{2})e^{-\rho(|x|-\frac{d}{2})} & \text{si } |x| > \dfrac{d}{2} \end{cases}$$

; où A est une amplitude constante.

c) Pour une longueur d'onde dans le vide $\lambda$ = 1,4 µm et un guide d'épaisseur d = 0,6µm, on trouve pour le mode fondamental $\gamma$ =3,73 $\mu m^{-1}$. Calculer les valeurs de $\rho\lambda$, $\rho d$ et de la quantité $1/\rho$. Quelle est la signification physique de la quantité $1/\rho$ ? Dans quel sens varie-t-elle lorsque l'ordre p du mode augmente ?

III-9) On introduit l'angle $\theta$ tel que : $\gamma = k n_c \cos\theta$.

a) Montrer que, dans la couche cœur du diélectrique, le champ électrique correspondant au mode fondamental peut être assimilé au champ électrique résultant de la superposition de deux ondes planes.

b) En considérant la condition de propagation dans le guide énoncée dans la question III-6-a, trouver l'inégalité que doit vérifier l'angle $\theta$ et en donner une interprétation physique.

## PARTIE IV : Application

Cette partie peut être traitée en admettant le résultat donné par la relation (1) de la question II-4-d. Les fibres optiques sont des matériaux du type étudié à la partie II. On considère une fibre formant une boucle circulaire de rayon R. Le diamètre de la fibre est négligeable devant R. Cette boucle est traversée par un fil rectiligne de très grande longueur, passant par le centre de la boucle et perpendiculaire à son plan. Le fil est parcouru par un courant d'intensité constante $I_0$ (figure 4).

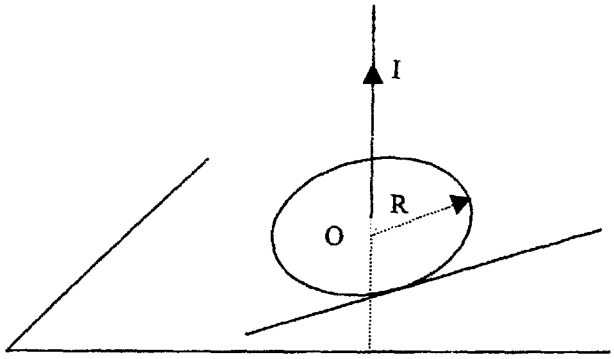


Figure 4

IV-1) Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil en un point de la boucle. On précisera sa direction, son sens et son module.

IV-2)Une vibration lumineuse, polarisée rectilignement, pénètre dans la fibre. Exprimer l'angle de rotation de la direction de polarisation de l'onde en fonction de $\mu_0$, $I_0$ et de la constante de Verdet V(définie à la question II-4-d), après un parcours d'un tour entier dans la fibre correspondant à une longueur $l$.

IV-3) On cherche à déterminer l'intensité $I_0$ à partir de la mesure de cet angle de rotation par interférométrie. On utilise à cet effet l'interféromètre ci-dessous représenté à la figure 5.

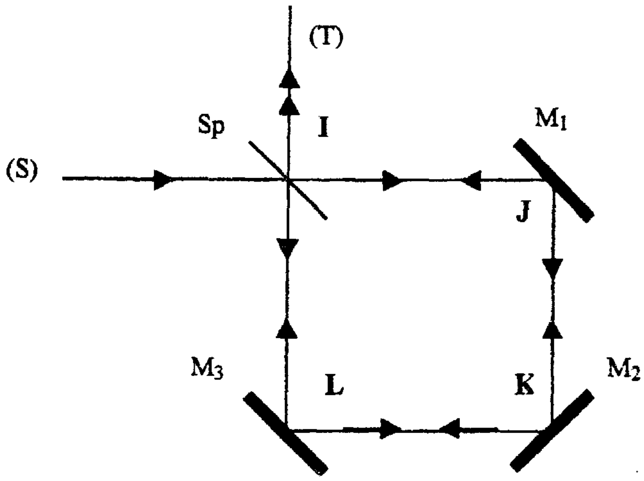


Figure 5

$S_p$ est une lame semi-réfléchissante, $M_1$, $M_2$ et $M_3$ sont des miroirs placés aux sommets d'un carré et orientés suivant les diagonales de celui-ci. Un faisceau de lumière parallèle, issu d'une source (S), est envoyé sur le dispositif de sorte que les angles d'incidence sur la lame semi-réfléchissante et sur les miroirs soient égaux à $\frac{\pi}{4}$. L'observation se fait sur un détecteur (T), conformément au schéma de la figure 5. En présence de la lame $S_p$, un rayon arrivant en I donne naissance aux trajets optiques $L_1$ et $L_2$ tels que $L_1$= (IJKLIT) et $L_2$= (ILKJIT).

a) On place entre I et L une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur b, perpendiculaire aux rayons lumineux. Calculer la différence de chemin optique entre les trajets $L_1$ et $L_2$ à la sortie de l'interféromètre.
   Qu'observe-t-on alors à la sortie de l'interféromètre au niveau du détecteur ?

b) On remplace cette lame par une lame de même épaisseur, constituée d'un matériau du type étudié à la partie II, placée dans un champ magnétique $\vec{B}_1$. Déterminer l'angle de rotation $\alpha_1$ de la direction de polarisation d'une lumière initialement polarisée rectilignement parcourant le trajet $L_1$. Quelle est l'angle de rotation $\alpha_2$ pour un rayon parcourant le trajet $L_2$ ? Conclure.

IV-4) On envoie dans l'interféromètre à fibre optique (figure 6), une vibration de polarisation circulaire droite. En l'absence de champ magnétique ($\vec{B}_1 = \vec{0}$), les trajets $L_1$ et $L_2$ sont identiques.

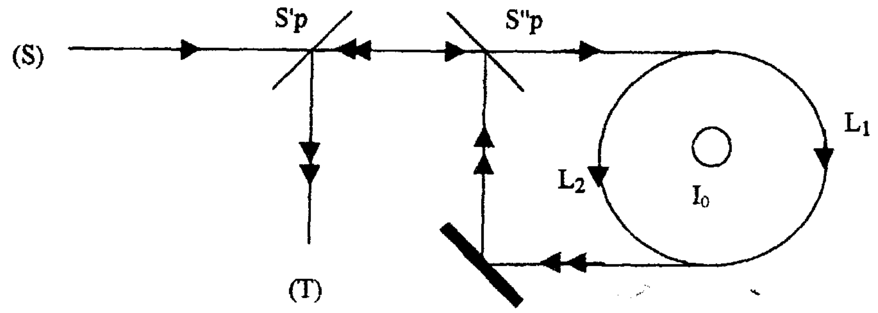


**Figure 6**

a) Montrer, qu' en présence d'un champ magnétique $\vec{B}_1$, le trajet $L_1$ est retardé, et que le trajet $L_2$ est avancé.

b) Calculer la différence de marche entre les deux ondes arrivant sur le récepteur en fonction de la longueur $l$ de la fibre, et des indices n' et n'' déterminés dans la partie II.

c) En déduire la différence de phase.

d) Proposer une méthode de mesure de l'intensité $I_0$.